GROUPE B

MATHÉMATIQUES

Dans tout le problème, m et n sont des entiers $\geqslant 0$; t, a et u des éléments de $\mathbb{R}$; h et v des éléments de $\mathbb{R}_+^*$; E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, normé de dimension finie.

Si φ est une application de l'intervalle $[v, u + mv]$ dans E, on pose :

$$\Delta_m(\varphi, u, v) = \sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p} C_m^p \varphi(u + pv)$$

PARTIE I

1° Calculer lorsqu'il est défini le vecteur $\Delta_m(\varphi, u + t, v) - \Delta_m(\varphi, u, v)$.

2° Même question pour $\Delta_m(\varphi, u, 0)$.

3° Même question pour $\dfrac{\delta}{\delta v}\Delta_m(\varphi, u, v)$, en précisant les conditions de validité.

4° Soit δ_n la fonction polynomiale telle que $\delta_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - (i-1)h)$.

Calculer $\Delta_m(\delta_n, a, h)$. (Dans cette question $E = \mathbb{R}$).

5° En déduire une expression simple du vecteur :

$$\Delta_n(f, a, h) - h^n f^{(n)}(a)$$

où f est une fonction polynomiale de degré $\leqslant n + 1$:

$$f(t) = \sum_{p=0}^{n+1} t^p \alpha_p \qquad , \qquad \alpha_p \in E$$

PARTIE II

1° Soit ω_n la fonction telle que $\omega_n(t) = \begin{cases} t^n & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$

On pose $F_n(a, h) = \Delta_n(\omega_n, a, h)$.

Quel est le signe de $F_n(a, h)$?

2° Dans la suite de cette partie, f désigne une fonction de classe C^{n+1} de l'intervalle $[a, a + nh]$ dans E ; M désigne la borne supérieure de $\|f^{(n+1)}(t)\|$ sur cet intervalle.

Pour $t \in [a, a + nh]$, on pose $g(t) = f(t) - \sum_{p=0}^{n} \dfrac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)$.

Démontrer l'égalité :

$$g(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t - \tau)^n f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau$$

3° Comparer $\Delta_n(f, a, h) - h^n f^{(n)}(a)$ et $\Delta_n(g, a, h)$.

4° Calculer $\Delta_n(f, a, h) - h^n f^{(n)}(a)$ en fonction du vecteur :

$$\int_a^{a+nh} F_n(a - x, h) f^{(n+1)}(x)\, dx$$

Examiner en particulier le cas $f(t) = \dfrac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

5° En déduire la majoration :

$$\|\Delta_n(f, a, h) - h^n f^{(n)}(a)\| \leqslant \frac{n}{2} h^{n+1} M$$

6° On suppose $E = \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un nombre réel θ tel que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$,

$$\Delta_n(f, a, h) - h^n f^{(n)}(a) = \frac{n}{2} h^n f^{(n+1)}(a + \theta nh).$$

PARTIE III

1° On suppose $n = 1$. Soit f une fonction deux fois dérivable dans l'intervalle ouvert $]a, a + h[$, de classe C^1 sur l'intervalle fermé $[a, a + h]$ (i.e. f et sa dérivée f' ont une limite aux deux extrémités de l'intervalle). Montrer que les résultats des questions II, 5° et II, 6° restent valables; autrement dit

On a $\|\Delta_1(f, a, h) - h f'(a)\| \leqslant \dfrac{h^2}{2} M$ si $\|f''\|_\infty \leqslant M$ sur $]a, a + h[$.

Si $E = \mathbb{R}$, on a $\Delta_1(f, a, h) - h f'(a) = \dfrac{h^2}{2} f''(\xi)$ pour un réel $\xi \in]a, a + h[$.

2° Examiner les cas $n = 2$, $n = 3$ (on pourra admettre le théorème de Darboux : l'image d'un intervalle par une fonction dérivée réelle est un intervalle).

FIN